ZEIT AKADEMIE

MATHEMATIK

Menschen, Rätsel und Beweise

Begleitbuch

ZEIT AKADEMIE

ZEIT AKADEMIE

MATHEMATIK

Menschen, Rätsel und Beweise

Zeitverlag Gerd Bucerius GmbH & Co. KG

Impressum

Wissenschaftliche Leitung Matthias Naß
Redaktion Christoph Drösser
Autor Prof. Dr. Günter M. Ziegler
Co-Autor Dr. Andreas Loos
Grafik, Satz und Reproduktion Zeitverlag Gerd Bucerius GmbH & Co. KG
Druck und Bindung optimal media GmbH, Röbel

VORWORT

Spricht man Menschen auf die Mathematik an, dann gibt es zwei typische Reaktionen: erstens eine gewisse Hochachtung – kaum jemand bezweifelt die Nützlichkeit dieser Wissenschaft, ohne die unsere technische Zivilisation undenkbar wäre. Und zweitens eine große Berührungsangst – viele, wenn nicht die meisten Menschen verbinden mit Mathematik auch frustrierende Erinnerungen an die Schulzeit, an Versagensängste und Prüfungsstress.

Diese Angst wollen wir Ihnen gleich am Anfang dieses ZEIT Akademie Seminars nehmen: Wir werden Sie nicht – oder kaum – mit Formeln traktieren, und Sie müssen am Ende keine Prüfung absolvieren. Lehnen Sie sich zurück, und lassen Sie sich von Professor Günter Ziegler von der Freien Universität Berlin die Geschichte der Mathematik des 20. und 21. Jahrhunderts erzählen.

Wer die Mathematik nur von der Schule her kennt, der mag den Eindruck gewonnen haben, dass es sich um eine »fertige« Wissenschaft handelt, die spätestens im 19. Jahrhundert weitgehend abgeschlossen war. In den Lektionen dieses ZEIT Akademie Seminars wird aber klar, dass diese Wissenschaft heute mehr offene Fragen hat denn je und sich in einer Vielzahl von Disziplinen weiterentwickelt. Sie lernen die wichtigsten Akteure kennen und erfahren, dass die scheinbar so sachliche und trockene Mathematik mit Leidenschaft und Kreativität vorangetrieben wird.

Ich freue mich, dass Sie sich auf das Abenteuer Mathematik einlassen wollen, und heiße Sie bei der ZEIT Akademie herzlich willkommen.

Christoph Drösser

INHALT

LEKTION 1

EINFÜHRUNG

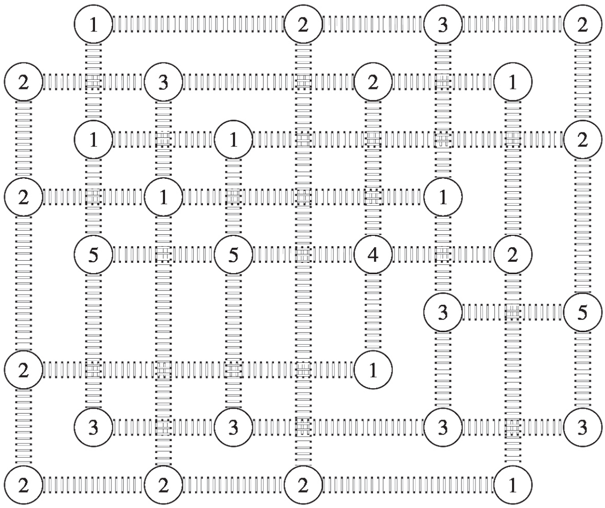
Mathematik – ist das ein exotisches Thema? Weit weg, vielleicht auch deshalb faszinierend, aber auch sehr irrelevant? *Betrifft* Sie das? Warum sollte Mathematik wichtig sein, warum wichtig für Sie? Wann hatten Sie das letzte Mal mit Mathematik zu tun? Wann haben Sie das letzte Mal Mathematik *gemacht?* Sagen Sie jetzt nicht: in der Schule. Vielleicht haben Sie sich nämlich schon heute Morgen mit Mathematik beschäftigt, beim Frühstück, in der S-Bahn oder im Bus, und es gar nicht gemerkt – beim Lösen eines Sudokus zum Beispiel.

Das ist meine Art, den Tag mit Mathematik anzufangen: Zum Frühstück kämpfe ich oft mit dem Sudoku in meiner Tageszeitung. Natürlich ist das nicht produktiv, eigentlich ist das Zeitverschwendung – aber das Knobeln und die Herausforderung reizen mich doch immer wieder. Nicht immer bin ich erfolgreich: Manchmal finde ich einfach den nächsten Schritt nicht, manchmal mache ich auch einen Fehler – und jeder einzelne Fehler rächt sich, denn beim Sudoku gelten die Regeln der Mathematik. »Fast richtig« gibt es nicht, ein kleiner Fehler in einem logischen Schritt lässt das gesamte Gedankengebäude zusammenfallen.

Warum ist ein Sudoku Mathematik? Wissenschaftlich betrachtet, ist jedes dieser Rätsel ein *kombinatorisches Optimierungsproblem* – und da steckt tatsächlich richtig viel Mathematik drin.

Dasselbe gilt auch für viele andere Rätsel, die man aus Zeitungen und Bahnhofsbuchhandlungen kennt: Das *Hashiwokakero* zum Beispiel, ein Spiel, bei dem man Zahlen durch Brücken verbinden muss – mathematisch gesprochen, konstruiert man Graphen –, das *Nonogramm,* das mathematisch ganz eng mit der Auswertung von logischen Formeln verwandt ist, Zahlenrätsel wie das *Kakuro* und, und, und …

Abb. rechts: Ein Hashiwokakero-Rätsel. Die Zahlen sind mit horizontalen und vertikalen Kanten (»Brücken«) zu verbinden; die Zahlen bezeichnen dabei die Anzahl der Brücken, die mit ihnen verbunden sind. Brücken dürfen sich nicht überschneiden, zwei Zahlen dürfen über höchstens zwei Brücken verbunden sein, und am Ende muss ein zusammenhängender Graph entstehen – man kommt also über die Brücken von jeder Zahl zu jeder anderen Zahl. *© A. Loos/A.Schulte*



Der Kern der Mathematik sind Beweise, mögen Sie einwenden. Aber wo steckt denn beim Sudoku-Lösen ein Beweis?

Er steckt in der Lösung: Ließ sich das Sudoku korrekt ausfüllen, dann ist damit die Behauptung bewiesen, dass das Rätsel lösbar ist. Und wenn man beim Lösen nicht schummelt und die Information nicht benutzt, dass die üblichen Sudokus immer nur eine Lösung haben, dann beweist man auf dem Weg zur Lösung sogar noch mehr – nämlich, dass das jeweilige Rätsel eindeutig lösbar ist.

Mathematik ist jedenfalls kein Zuschauersport. Die Mathematik als Wissenschaft ist aber auch keine Kampfsportart, sondern eher schon ein gigantischer Teamwettbewerb, trotz aller Schülerwettbewerbe und Mathematikolympiaden und obwohl es auch unter Mathematikern und Mathematikerinnen gelegentlich Konkurrenz, Neid, Eifersucht und Prioritätsstreitigkeiten gibt. Wir sind halt auch nur Menschen.

Ich selbst bin durch das Knobeln zur Mathematik gekommen, die Probleme haben mich als Herausforderung gereizt; Zahlen, Muster und Rätsel haben mich fasziniert. So habe ich zum Beispiel als Schüler versucht, den *Vierfarbensatz* neu zu beweisen. Der Satz besagt, dass man jede Landkarte immer mit höchstens vier Farben einfärben braucht, wenn Länder mit gemeinsamer Grenze unterschiedliche Farben erhalten sollen.

Mitte der 1970er Jahre ist dieser Satz bewiesen worden, von einem Team aus zwei Mathematikern und einem Computer: Wolfgang Haken (*1928) und Kenneth Appel (1932–2013) haben für ihren Beweis, nach einem Ansatz von Heinrich Heesch (1906–1995), das Problem auf die Untersuchung einer sehr großen, aber endlichen Anzahl von Konfigurationen reduziert und alle diese Konfigurationen per Computer überprüft. Das war der erste große Beweis in der Mathematik mit Computerhilfe – und er wurde mit Skepsis und Misstrauen beäugt. Ich dachte damals, ich könnte einen viel einfacheren Beweis finden, der ohne Computer auskommt. Natürlich ohne Erfolg.

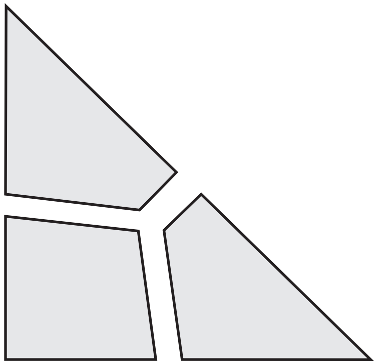
Erfolglos bin ich auch bei einem zweiten großen Projekt geblieben, an das ich mich als Jugendlicher wagte: den Beweis der *3x+1-Vermutung,* die man auch als *Ulam-Problem* oder *Collatz-Problem* kennt. Sie besagt, dass man von jeder natürlichen Zahl aus irgendwann zur 1 gelangt, wenn man sie nur halbiert, falls sie gerade ist, und sonst dreimal die Zahl plus eins nimmt – und diese Rechenschritte immer wieder wiederholt. Ein Beispiel: Wir starten bei der 11. Das ist eine ungerade Zahl, also ist die nächste Zahl $3 \cdot 11 + 1$. So kommen wir zur 34, einer geraden Zahl. Die nächste Zahl ist also einfach die Hälfte, die 17, dann kommen 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2 und schließlich die 1 – angekommen. Noch ein Beispiel: Von der 19 kommen wir zu $3 \cdot 19 + 1 = 58$, und dann 29, 88, 44, 22, 11 … und von dort kommen wir wieder, wie vorhin gesehen, schließlich zur 1. Von der 15 aus finden wir 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Jedes Experiment, das man per Hand oder mit dem Taschenrechner macht, wird über kurz oder lang zur 1 führen.

Denn die $3x + 1$-Vermutung ist inzwischen für alle kleineren und auch für sehr große Startwerte mit dem Computer überprüft worden – und immer kam man nach einer kürzeren oder längeren Achterbahnfahrt durch die Zahlen bei der 1 heraus. Doch dass das für alle Zahlen klappt, ist auch heute immer noch nicht bewiesen. Was wie eine Spielerei aussieht, hat mit sehr klassischen mathematischen Problemen und Theorien zu tun, mit der *Approximierbarkeit* von bestimmten irrationalen Zahlen und mit der *Theorie der Dynamischen Systeme.*

Das Knobeln an kleinen und großen Problemen hat mich zum Studium der Mathematik an der Universität München geführt, dann zur Promotion am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge bei Boston. Nach vier Postdoc-Jahren in Augsburg und einem Winter am Mittag-Leffler-Institut in Stockholm bin ich schließlich am 1. April 1992 in Berlin gelandet.

Von 1995 an war ich Professor für Mathematik an der Technischen Universität Berlin, seit 2011 an der Freien Universität Berlin.

Hier beschäftige ich mich mit Problemen der *Diskreten Geometrie.* Was bedeutet das? Ein Beispiel sind Aufteilungs- und Zerlegungsprobleme. Mich reizen dabei Fragen, die am Anfang ganz harmlos klingen, wie etwa: *»Kann man jedes Dreieck mit geraden Schnitten in drei konvexe Teile von gleichem Flächeninhalt und gleichem Umfang zerteilen?«* (»Konvex« nennt man die Teile, wenn sie keine Einbuchtungen besitzen.) Und mal vorausgesetzt, es geht für drei Teile – geht es dann auch für vier, fünf, sieben oder zehn Teile?



Wie zerschneidet man ein Dreieck in drei konvexe Polygone, die jeweils den gleichen Umfang und die gleiche Fläche haben?

© A. Loos/G. Ziegler

Wir haben bei diesem Problem Fortschritte erzielt: Wir haben (zusammen mit Pavle Blagojević) bewiesen, dass man die Dreiecke tatsächlich so zerschneiden kann, wenn die gewünschte Anzahl an Teilen eine *Primzahlpotenz* ist, also entweder eine echte Primzahl wie 2, 3, 5 usw. oder so etwas wie $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ oder $9 = 3 \cdot 3$. Für die anderen Anzahlen, also zum Beispiel $2 \cdot 3=6$, $2 \cdot 5=10$ oder $5 \cdot 3=15$, ist die Frage weiterhin nicht geklärt. Aber, um es mit dem großen Mathematiker David Hilbert zu sagen: »Wir müssen wissen! Wir werden wissen!«

Das Zerlegungsproblem ist natürlich auch ein kleines Knobelproblem und daher reizvoll, aber für mich ein willkommener Testfall für fortgeschrittene mathematische Methoden und größeres mathematisches Werkzeug: Für den Beweis unseres kleinen Problems haben wir die *Äquivariante Hindernistheorie* verwendet, eine sehr spezielle Methode aus der *Algebraischen Topologie,* und zusätzlich Ergebnisse über Teilbarkeitseigenschaften von *Binomialkoeffizienten* aus der *Zahlentheorie.* Zur (teilweisen) Lösung des Problems haben wir also Brücken geschlagen zwischen ganz verschiedenen Teilbereichen der Mathematik. So etwas finde ich besonders reizvoll und interessant, denn dabei erfährt man am eigenen Leibe, wie vielfältig, spannend und bunt die Mathematik ist, mit Teilgebieten von der Geometrie bis zur Wahrscheinlichkeitstheorie, von der Analysis und dem sogenannten Wissenschaftlichen Rechnen bis zur Komplexitätstheorie – eben ein riesiger Abenteuerspielplatz.

Ich lade Sie für die folgenden Lektionen des ZEIT Akademie-Seminars zu einem Spaziergang über diesen Abenteuerspielplatz der Mathematik ein. Gleich am Anfang des Rundgangs kommen wir zur Kernfrage: »Was ist Mathematik?« – und die ist gar nicht einfach zu beantworten, weil Mathematik inzwischen eine riesige und vielfältige Wissenschaft geworden ist. Wir suchen dann etliche der großen Probleme der Mathematik auf. Von diesen sind sehr viele in den letzten 25 Jahren spektakulär gelöst worden – das *Fermat-Problem* über die Summe von Potenzen zum Beispiel und das *Kepler-Problem* über das platzsparende Packen von Kugeln in den dreidimensionalen Raum. Andere klassische Probleme haben sich als unlösbar herausgestellt, wie die sprichwörtliche »Quadratur des Kreises« mit Zirkel und Lineal. Wir werden auch über das Einteilen von Berechnungsproblemen nach Entscheidbarkeit und nach Komplexität sprechen und darüber, warum die Mathematik so nützlich sein kann im Alltag, auf dem Handy, im Navigationsgerät, in Logistik oder Finanzwirtschaft. Und damit sind wir mitten in der Gegenwart: Wie sieht »Mathematik-Machen« heute aus?

LITERATUREMPFEHLUNGEN:

Zum Vierfarbenproblem:

Robin Wilson (2002): Four colours suffice, Princeton University Press, Princeton NJ.

Zum 3 x + 1-Problem:

Jeffrey C. Lagarias (2011): The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem, American Mathematical Society, Providence RI.

Zum Zerlegen von Dreiecken (Achtung: technisch!):

Pavle V. M. Blagojević/Günter M. Ziegler (2014): Convex equipartitions via Equivariant Obstruction Theory, Israel Journal of Mathematics, Online-Publikation.